

Diala, Jour, Volume, 37, 2009

التحيز في مرونة مقدرات الانحدار الخطي :
بعض النتائج التحليلية .

م.احمد سلطان القرة غولي

كلية التربية

الاساسية/جامعة ديالى

باستخدام الاضطرابات الصغيرة التوسعات . سنشتق عبارات تحليلية للتحيز في
مقدر المرونة بطريقة المربعات الصغرى (oLs) في النموذج الخطي ، سواء
على الصعيد الفردي (sample point) ومتوسط العينة . كبر هذه التحيزات
موضحة على بيانات النفقات الاسترالية .

Abstract

Using small disturbance expansions, we derive analytic expression for the bias of the oLs estimator of an elasticity in a linear model, both at an individual sample point and at the sample mean. The magnitudes of these biases are illustrated with Australian expenditure data.

1-المقدمة :

ان النموذج الخطي كثيرا ما يستخدم بتقدير المرونة بين متغيرات الفائدة عندما يكون النموذج خطي في المتغيرات والثوابت . تكون المرونة ومقدراتها دوال غير خطية للبيانات العشوائية . وبناء على ذلك فان هذه المقدرات تكون متحيزة في العينات المحدودة - وهي النقطة التي اهتمت دائما في الممارسة العملية . هذا البحث يوضح حجم التحيز على وجه التحديد و لنفترض النموذج

:

$$Y = X\beta + \sigma\mu$$

(1)

حيث ان $X (n \times k)$ غير عشوائية $\mu \sim N [0, In]$.
'i' مقدر المرونة بطريقة المربعات الصغرى (oLs) للمتغير y
بالنسبة الى
المتغير المستقل الذي رتبته i يكون

$$\hat{\eta}_{ij} = \beta_j \frac{\hat{x}_{ij}}{\hat{y}_i}$$

(2)

او اذا ما كان لنا تقدير المرونة في متوسط العينة ،

$$\bar{\eta}_i = \beta_j \frac{\bar{x}_j}{\bar{y}}$$

(3)

حيث β_j مقدرات oLs ($j = 1, 2, \dots, k$) ، في حد ذاته هو دالة لبيانات y .

في إطار الظروف الخفيفة، فإن هذه التقديرات متسقة. وللمزيد من الفائدة في العينات المحدودة ، التحيزات المضبوطة للمقدرات بالغة التعقيد ، وذلك لأنه (2) و (3) هي دوال غير خطية بالنسبة لبيانات y .

في الجزء التالي نناقش استخدام تقريب سيغما الصغيرة ، وعرض النتائج الرئيسية التي نستخدمها في الاشتقاقات ، ويعرض الجزء 3 نتائج النظرية الرئيسية ، وتفسير الآثار المترتبة عليها . أما الجزء الرابع فيوضح مثال على ذلك أما الجزء الخامس يتضمن الاستنتاجات.

2-تقريب الاضطرابات الصغيرة

ان التحيز في مرونة المقدرات يمكن أن يقترب بطرق مختلفة . احدها هو استخدام تقريب تحليلي يقوم على التوسع الذي يحسن (n) حجم العينة هكذا تقريب اقترحه (Nagar (1959) في سياق اقتصادي ويشمل توسيع الخطأ ز انه في مثل هذه المصطلحات المتعاقبة تساعد على خفض احتمال ترتيب (n) . عندما نريد ايجاد العزوم لاي مقدر فان هذا الاجراء يؤدي الى عزوم (Edgeworth (لتوزيع ذلك المقدر (Ulah , 2004 , p.29) وكبديل مثل (Kadane . 1971) لتقريب عزوم العينات المحدودة للمقدر من خلال التوسع في خطأ المعاينة يجب ان يتم في فترات متتالية من اجل خفض احتمال الانحراف المعياري للمجتمع (σ) هذه الاضطرابات الصغيرة σ^2 الصغيرة هي تقريبية وقد تبين انها قيمة للغاية لعدد من المشاكل في الاقتصاد القياسي . وهي صالحة لأي حجم عينة وهي الانتاج الى افتراضات إضافية بشأن سلوك عزوم العينة من البيانات عندما يزداد حجم العينة (n)

في الآونة الاخيرة تمت مناقشة توسعات الاضطرابات الصغيرة (Ulah , 2004, p. 36-45) .

$$y = \mu + \sigma_{\mu i} \quad ; \quad i=1,2,\dots,n$$

(4)

حيث ان $\mu \neq$ صفر

μ_i 's مستقلة ومتماثلة ولها توزيع بحيث ان :

$$E(\mu_i) = 0 \quad ; \quad E(\mu_i^2) = 1 \quad ; \quad \gamma_1 \quad ; \quad E(\mu_i^4) = \gamma_{2+3} \quad (5)$$

$(\mu_i^3) =$

بذلك فإن الالتواء والتفرطح لتوزيع المجتمع هي γ_1 و γ_2 . على التوالي هدفنا هو تحديد التحيز في مقدرات المرونة في (2) ، (3) تحت الافتراضات حول توزيع المجتمع ، الى $O(\sigma^4)$. تستخدم النتيجة التالية :

ليما 1 (Ulah , 2004 , 38.)

ليكن 'y' متجه من (n) من العناصر العشوائية حيث ان $y = \mu + \sigma_{\mu}$

بحيث ان 'μ' يحقق الشرط في (5) اعلاه عندما المتوسط لا يساوي صفر ، μ ،

داله لمتجه المعالم ، Θ . لتكن $\Theta = h(y)$ هو تقدير لـ Θ بحيث انه $h(y)$

ومشتقاتها موجودة وبجوار μ . وعليه فان :

$$\Theta -) = \sigma^2 \Delta_2 + \sigma^3 \gamma_1 \Delta_3 + \sigma^4 (\gamma_2 \Delta_4 + 3 \Delta_{22}) \quad (6)$$

$E(\Theta$

$$\Delta_s = \frac{1}{S!} \sum_{k=1}^n \left[\frac{\partial^s h(y)}{\partial y^s_k} \right]_{y = \mu} \quad \text{عندما } s = 2, 3, 4$$

$$\Delta_{22} = \frac{1}{4!} \sum_{k=1}^n \sum_{L=1}^n \left[\frac{\partial^4 h(y)}{\partial y^2_k \partial y^2_L} \right]_{y = m}$$

ألان نموذج (1) في ظل ظروف ليما 1 باستخدام معيار تقييم النتائج :

$$\hat{\beta}_j = (x_j' M_{-j} x_j)^{-1} (x_j' M_{-j} y) ; \quad j = 1, 2, 3, \dots, k \quad (7)$$

$$M_{-j} = I - x_{-j} (x_{-j}' x_{-j})^{-1} x_{-j}' \quad \text{حيث ان}$$

x_{-j} = x العمود j من المصفوفة

x_{-j} = مصفوفة المتغيرات المستقلة باستثناء العمود x_j

3. المرونة في البيانات الفردية للنقاط

مقدرات المرونة بطريقة المربعات الصغرى (ols) للمتغير المعتمد (y) مع الاخذ بنظر الاعتبار x_j

للمشاهدة ith يكون:

$$\begin{aligned} \hat{\eta}_{ij} &= \hat{\beta}_j \frac{x_{ij}}{y_i} = x_{ij} (x_j' M_{-j} x_j)^{-1} \frac{x_j' M_{-j} y_j}{y_i} \\ &= x_{ij} (x_j' M_{-j} x_j)^{-1} h(y) \end{aligned}$$

(8)

$$h(y) = \frac{x_j' M_{-j} y}{y_i} = x_j' M_{-j} y^* \quad (9)$$

$$y^* = \frac{y}{y_i} \quad (10)$$

ثم ان σ الصغيرة هي تقريب مقارب لهذا التحيز في مرونة التقديرات.

نظرية (1)

Diala, Jour, Volume, 37, 2009

$$\text{Bais } (\hat{\eta}_{ij}) = \mathbf{x}_{ij} \left\{ \sigma^2 \left[\beta_j \sum_i (\mathbf{x}_i \beta)^{-3} - (\mathbf{x}_j \mathbf{M}_j \mathbf{x}_j)^{-1} \sum_i [(\mathbf{x}_j \mathbf{M}_j \mathbf{I}_i) / (\mathbf{x}_i \beta)^2] \right] - \sigma^3 \gamma_1 \left[\beta_j \sum_i (\mathbf{x}_i \beta)^{-4} - (\mathbf{x}_j \mathbf{M}_j \mathbf{x}_j)^{-1} \sum_i [(\mathbf{x}_j \mathbf{M}_j \mathbf{I}_i) / (\mathbf{x}_i \beta)^3] \right] + \sigma^4 (\gamma^2 + 3) \left[\beta_j \sum_i (\mathbf{x}_i \beta)^{-5} - (\mathbf{x}_j \mathbf{M}_j \mathbf{x}_j)^{-1} \sum_i [(\mathbf{x}_j \mathbf{M}_j \mathbf{I}_i) / (\mathbf{x}_i \beta)^4] \right] \right\}$$

حيث ان :

$\mathbf{I}_i (n \times 1)$ = هو عبارة عن عمود عنصره الذي رتبته i يكون مساويا للواحد وجميع

العناصر الاخرى مساوية للصفر ويتم الجمع من 1 الى n .

البرهان :

من المعادلة (8)

$$\text{Bais } (\hat{\eta}_{ij}) = \mathbf{x}_{ij} (\mathbf{x}_j \mathbf{M}_j \mathbf{x}_j)^{-1} \text{Bias } [h(\mathbf{y})] \quad (11)$$

ومن (9)

$$\frac{\partial^s h(\mathbf{y})}{\partial y_k^s} = \mathbf{x}_j \mathbf{M}_j \frac{\partial^s y^*}{\partial y_k^s} \quad (12)$$

وهذا يبعث على الملل ولكن بعض التفاضل الجزئي يعطي بعض النتائج عندما

$s=2,3,4,\dots$

$$\frac{\partial^s h(\mathbf{y})}{\partial y_k^s} = (-1)^s (s!) [\mathbf{x}_j \mathbf{M}_j (\mathbf{y} - y_k \mathbf{i}_k)] / y_k^{s+1}; k=i$$

$$= 0 \quad ; k \neq i$$

$$\frac{\partial^4 h(\mathbf{y})}{\partial y_k^2 \partial y_i^2} = (4!) [\mathbf{x}_j \mathbf{M}_j (\mathbf{y} - y_k \mathbf{i}_k)] / y_k^5 \quad ; i=k=I$$

$$= 0 \quad ; \text{فيما عدا ذلك}$$

من ليما 1 وبالإشارة الى ان $E(y_i) = \mathbf{x}_i \beta (i=1,2,3,\dots,n)$

$$\Delta_s = (-1)^s \left\{ (\mathbf{x}_j \mathbf{M}_j \mathbf{x}_j \beta_j) \sum (\mathbf{x}_k \beta)^{-(s+1)} - \sum [(\mathbf{x}_j \mathbf{M}_j \mathbf{i}_k) / (\mathbf{x}_k \beta)^s] \right\}; \Delta_{22} = \Delta_4 \text{ و}$$

ل $s=2,3,4$

Diala, Jour, Volume, 37, 2009

واخيراً لتطبيق ليما 1 ولمعادلة 11 يمكن الوصول الى النتيجة مباشرة من نظرية 1 فأن
حجم التحيز يكون غير محدد.

نتيجة (1)

إذا كان النموذج يحتوي على متغير مستقل واحد وتركيبها من خلال الاصل فأن التحيز
في مرونة المقدرات لاي مشاهدة يكون :

$$\hat{\eta}_{ij} = x_i \left[\frac{\sigma^2}{\beta^2} \left(\sum_i \frac{1}{x_i^3} - \frac{1}{\sum_i x_i} \right) / \sum_i x_i^2 - \frac{\sigma^3 \gamma_1}{\beta^3} \left(\sum_i \frac{1}{x_i^4} - \frac{1}{\sum_i x_i^2} \right) / \sum_i x_i^2 + \frac{\sigma^4 (\gamma_2 + 3)}{\beta^4} \left(\sum_i \frac{1}{x_i^5} - \frac{1}{\sum_i x_i^3} \right) / \sum_i x_i^2 \right]$$

ومرة اخرى فأن التوقع وحجم التحيز غير محدد , وبشكل عام
وباستخدام متباينة هوليدر (Kendall and Stuart, 1977, p39) للمتغيرات
المستقلة الموجبة يكون التحيز موجب بالنسبة الى $O(\sigma^2)$ وكذلك موجبة بالنسبة الى
 $O(\sigma^4)$ للبيانات المتماثلة

3.2 المرونة على متوسط العينة

نظرية (1) تتيح لنا التحيز للمرونة بالنسبة لتغير مستقل لاي مشاهدة وفي الممارسة
العملية لحساب المرونة على متوسط حجم العينة في (13) هذه الحالة يكون لدينا:

$$\hat{\eta}_{ij} = \beta_j \frac{x_i}{y} = x_j (x_j M_{-j} x_j)^{-1} \frac{(x_j' M_{-j} y)}{y} = x_j (x_j M_{-j} x_j)^{-1} g(y)$$
$$g(y) = \frac{(x_j' M_{-j} y)}{y} = x_j' M_{-j} y^*$$

(14)

y

$$(15) \quad y^* = \frac{1}{y}$$

نظرية (2)

$$\text{Bais } (\eta_{ij}) = \bar{x}_j [\beta_j - (\bar{x}\beta)] \frac{(\bar{x}_j M_{-j} i)}{(\bar{x}_j M_{-j} x_j)^{-1}} \left[\frac{\sigma^2}{n(\bar{x}\beta)^3} - \frac{\sigma^3 \gamma_1}{n^2(\bar{x}\beta)^4} + \frac{\sigma^4(\gamma_2 + 3n)}{n^3(\bar{x}\beta)^5} \right]$$

حيث ان $i_{(n \times 1)}$ عمود متجه

البرهان : من المعادلة (13)

$$(16) \quad \text{Bais } (\eta_{ij}) = \bar{x}_j (\bar{x}_j M_{-j} x_j)^{-1} \text{Bais } [g(y)]$$

For $s = 2, 3, 4, \dots$

$$\frac{\partial^s g(y)}{\partial y^s_k} = (-1)^s (s!) [\bar{x}_j M_{-j} (y - n\bar{y}_{ik})] / n^s \bar{y}^{(s+1)}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 g(y)}{\partial y^2_k \partial y^2_1} &= (4!) [\bar{x}_j M_{-j} (y - 0.5n\bar{y}_{ik} - 0.5n\bar{y}_{il})] / n^4 y^{-5} ; k \neq 1 \\ &= (4!) [\bar{x}_j M_{-j} (y - n\bar{y}_{il})] / n^4 y^{-5} ; k = 1 \end{aligned}$$

$$\Delta_s = (-1)^s [(\bar{x}_j M_{-j} x_j \beta_j) - (\bar{x}\beta) \sum_k (\bar{x}_j M_{-j} i_{jk})] / n^{s-1} (\bar{x}\beta)^{s+1}$$

$$\Delta_{22} = [(\bar{x}_j M_{-j} x_j \beta_j) - (\bar{x}\beta) \sum_k (\bar{x}_j M_{-j} i_{jk})] / n^2 (\bar{x}\beta)^5$$

Diala, Jour, Volume, 37, 2009

حيث ان $X(1 \times k) =$ متجه صفي عنصره الذي برتبة i يمثل المتوسط للعمود i من المصفوفة X .

واخيرا بتطبيق ليما (1) والمعادلة (16) يمكن الحصول على النتيجة من نظرية (2) مباشرة.

نتيجة (2)

اذا كان النموذج يحتوي على متغير مستقل واحد وتركيبها من خلال الأصل فان التحيز في مرونة المقدرات في متوسط العينة يكون:

$$\text{Bais } (\eta_{ij}) = \left(\frac{1}{\bar{x}^2} - \frac{1}{\sum_i x_i^2} \right) \left[\frac{\sigma^2}{n\beta^2} - \frac{\sigma^3 \gamma_1}{n^2 \bar{x} \beta^3} + \frac{\sigma^4 (\gamma_2 + 3n)}{n 3 \bar{x}^2 \beta^4} \right]$$

لتفسير هذه النتيجة أولاً باستخدام متباينة جينز.

$$\bar{x}^2 \leq \sum x_i^2 / n$$

لذلك فان $O(\sigma^2)$ وبغض النظر عن توزيع الاخطاء فان مقدار المرونة متميز صعوداً وكافي ولكن ليس

ضروريا ليكون $O(\sigma^4)$ متميز صعوداً.

بالنسبة الى $O(\sigma^4)$ يكون

$$1 + \frac{\sigma^2 (\gamma_2 + 3n)}{n^2 \bar{x}^2 \beta^2} > \frac{\sigma \gamma_1}{n \bar{x} \beta}$$

اذا كان المتغير المستقل يأخذ فقط فيما موجب والاختفاء متماثلة التوزيع يكون التميز

$$\text{Bais } (\eta_{ij}) > 0$$

بالنسبة الى $O(\sigma^4)$

4. مثال توضيحي

Diala, Jour, Volume, 37, 2009

لتوضيح هذه النتائج لدينا تقديرات لمنحنيات انجل الخطية للمشروبات الكحولية والمارجونا وذلك باستخدام بيانات من استراليا التي استخدمت من قبل (Clements and Zhao,2005) الأنفاق على كل سلعة موضح بالانفاق على كل مجموعة من البضائع.

المرونة مقدرة بطريق المربعات الصغرى (OLS) والنسبة المئوية للتحيز كما في الجدول رقم (1) وان التحيز في المرونة يتراوح بين صفر % الى 10% لافراد العينة ولكن لايعتمد بها لتقييم مرونة متوسط العينة حيث ان التحيز في تقدير $O(\sigma^2)$ قريب جدا من التحيز $O(\sigma^4)$ وهذه علامات ايجابية تعكس جزئيا البيانات ومعامل الانحدار للتقديرات.

5. الاستنتاجات.

لقد قمنا باشتقاقات للتحيز في مقدار المرونة بطريق المربعات الصغرى (OLS) للمرونة النقطية في النموذج الخطي ، سواء على الصعيد الفردي للعينة و متوسط العينة هذه الاشتقاقات هي على أساس الاضطرابات الصغيرة التوسعات. وان هذه التحيزات يمكن ان تكون كبيرة بما يكفي لتبرير الاهتمام بها من الناحية العلمية لاسيما في حالة مرونة نقطة معينة.

Diala, Jour, Volume, 37, 2009

جدول رقم (1)

مقدرات المرونة والتحيز

(ب)		(أ)				السلعة
التحيز		المرونة	التحيز		المرونة	السنة
$O(\sigma^4)$	$O(\sigma^2)$		$O(\sigma^4)$	$O(\sigma^2)$		
3.7783	3.6568	1.4234	0.0743	0.0744	0.6760	1988
3.7094	3.6772	1.4977	0.0773	0.0774	0.6868	1989
3.6693	3.5513	1.6239	0.0813	0.0814	0.6852	1990
3.7460	3.6255	1.6449	0.0823	0.0824	0.6991	1991
3.8788	3.7538	1.5507	0.0801	0.0802	0.7007	1992
3.9848	3.8563	1.5099	0.0803	0.0804	0.6982	1993
4.1805	4.0455	14.4804	0.0816	0.0817	0.7056	1994
4.3576	4.2166	1.4371	0.0835	0.0836	0.6967	1995
4.6102	4.4607	1.4257	0.0861	0.0862	0.7072	1996
4.9473	4.7863	1.3696	0.0873	0.0874	0.7167	1997
5.1647	4.9964	1.3507	0.0877	0.0878	0.7333	1998
0.0258	0.0257	1.4784	0.0066	0.0006	0.7011	المتوسط

(د)		(ج)				السلعة
التحيز		المرونة	التحيز		المرونة	السنة
$O(\sigma^4)$	$O(\sigma^2)$		$O(\sigma^4)$	$O(\sigma^2)$		
3.2512	3.4044	0.5653	5.7492	5.4676	2.5389	1988
3.5540	3.7219	0.5486	6.3890	6.0742	2.4314	1989
3.8702	4.0536	0.5298	6.7328	6.4001	2.4268	1990
4.1999	4.3997	0.5061	6.6866	6.3563	2.5241	1991
3.8925	4.0770	0.5308	6.9376	6.5941	2.3772	1992
3.5757	3.7447	0.5757	8.0135	7.6130	2.0773	1993
3.5914	3.7612	0.5885	8.6815	8.2451	1.9807	1994
3.4832	3.6477	0.6123	8.8591	8.4130	1.9640	1995
3.7588	3.9379	0.5956	9.1145	8.6546	2.0035	1996
3.8293	4.0108	0.6013	9.4666	8.9874	1.9886	1997
3.9871	4.1764	0.5942	9.9538	9.4478	1.9518	1998
0.0260	0.0260	0.5671	0.0427	0.0425	2.1694	المتوسط

ملاحظة: (المتوسط) يعني متوسط القيمة.

Diala, Jour, Volume, 37, 2009

المصادر

1. Clements, K. W. Zhao X. , 2005 Economic aspects of Marijuana. Invited address, Economic Ph.D Conference, University of Western Australia.
2. Kendall, M., Stuart, A., 1977, The adrnced Theory of Statistics. Charles Griffin, London.
3. Nagar A.L., 1959 The bias and moments matrix of general K-class estimators of the parameters in structural equations. *Econometrica* 27, 575-595.
4. Kadane J.,1971 Comparison of K-class estimators when the disturbance are small. *Econometrica* 39, 723-737.
5. Ullah. A., 2004 Finite sample Econometrics. Oxford university press, Oxford.